Θέματα
Σεπτεμβρη
2017
Απειροστικος
Λογισμός 4

Θέμα 1. [2] Έστω $C \subset \mathbb{R}^2$ η καμπύλη που αποτελείται από το τμήμα του κύκλου κέντρου $(0,0)$, το οποίο συνδέει τα σημεία $(1,1)$ και $(-1,1)$, και από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία αυτά με το $(0,0)$.

(α') [0.4] Υπολογίστε το μήκος της C.

(β') [0.4] Υπολογίστε το $\int_C (12xy+3,6x^2)\cdot d(x,y)$, όπου C θετικά προσανατολισμένη.

(γ') [1.2] Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για την C και $\bar{f}(x,y)=(y,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Θέμα 2. [1] Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και θετική, δείξτε: $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right)\geq (b-a)^2$.
[*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε, αφού την αποδείξετε, την ανισότητα $c+1/c\geq 2$ για $c>0$.]

Θέμα 3. [1] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Θέμα 4. [1] Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=n^2x^n(1-x)$, συγκλίνει (α') κατά σημείο και (β') ομοιόμορφα.

Θέμα 5. [5] Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $a,b,c,d>0$ με $a<b$, $d^2=\frac{b-a}{2c}$ και

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in D,\ a+c(x-x_0)^2+c(y-y_0)^2\leq z\leq b-c(x-x_0)^2-c(y-y_0)^2\},$$

όπου

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq d^2\}.$$

(α') [0.4] Δείξτε ότι το D είναι κανονικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$.

(β') [0.4] Δείξτε ότι το V είναι κανονικό χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ ως προς το επίπεδο $0xy$.

(γ') [0.4] Υπολογίστε τον όγκο του V.

(δ') [0.6] Δείξτε ότι το $V\subset\mathbb{R}^3$ είναι Jordan-μετρήσιμο.

(ε') [0.6] Δείξτε ότι τα σύνολα

$$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z\geq\frac{a+b}{2}\right\}\cap\partial V \quad \text{και} \quad S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z\leq\frac{a+b}{2}\right\}\cap\partial V$$

είναι επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.

(στ') [0.6] Υπολογίστε το εμβαδό του ∂V.

(ζ') [0.6] Υπολογίστε το $I=\int_{\partial S_1}\left(-(y-y_0),x-x_0,g(x,y,z)\right)\cdot d(x,y,z)$, όπου ∂S_1 θετικά προσανατολισμένη στο επίπεδο $z=\frac{a+b}{2}$ και $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη.

(η') [0.6] Βρείτε μία $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, έτσι ώστε $\int_{S_1}\bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma=I$, όπου $I\in\mathbb{R}$ αυτό του (ζ').

(θ') [0.8] Αν η g του (ζ') είναι δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, βρείτε μία $\bar{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, έτσι ώστε

$$\int_{V\cap\{z=\frac{a+b}{2}\}}\bar{G}\cdot(0,0,-1)d\sigma=-I,$$

όπου $I\in\mathbb{R}$ αυτό του (ζ').

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!